[Com]binazione lineare

$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$

scalari (coefficienti c.e.)

- Linearmente indipendente → se è l'unica c.e. che da come risultato il vettore nullo è quella in cui tutti i coefficienti sono zero.
- Linearmente dipendente → 1 dei coefficienti diversi da zero, da come risultato il vettore nullo.

Esempio → $\vec{v}_1(1,2)$ $\vec{v}_2(3,4)$ in $\mathbb{R}^2$

$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = c_1(1,2) + c_2(3,4) =$

$c_1 + 3c_2,\ 2c_1 + 4c_2)$

l.i.

Generatori

↳ vettori che generano spazio o sottospazio

$\mathbb{R}^2$ $\{(1,0),(0,1)\}$

$\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

com. lin → $x \cdot (1,0) + y(0,1)$

generatori

Somma diretta $\oplus$

$V = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $W = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

Somma

$V + W = \{(x,0) + (0,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}$

$V + W = \mathbb{R}^2$

Intersezione

$V \cap W = \{(x,0) \cap (0,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = 0,0$

$Im(f) = rk$

$Ker(f) =$ sistema

$\dim Ker(f) = \text{sottos} - Imf$

matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0 \ldots)$

vettori

$|V| = \sqrt{v(x)^2 + (v_y)^2}$ modulo

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$

vettore somma $\sqrt{(V_1)^2 + (V_2)^2 + (2 \cdot V_1 \cdot V_2) \cdot (\cos\alpha)}$

vettore differenza $\sqrt{|V_1|^2 + |V_2|^2 - (2 \cdot V_1 \cdot V_2) \cdot (\cos\alpha)}$

SISTEMI LINEARI

$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \text{risultato} \\ & & & \end{array} \right)$ soluzioni quelle dopo la linea

teorema Rouche-Capelli

$rk(A) = rk(A,B) \rightarrow$ sistema compatibile

1) il sistema ha soluzione $rk(A) = n$ — numero incognite

2) ∞ soluzioni se $rk(A) < n$

TEOREMA CRAMER

sistema lineare quadrato

$\det(A) \neq 0$ 1 soluzione

$= 0 \rightarrow$ sistema impossibile o indeterminato

impossibile $\downarrow$ $rk(A) \neq rk(A,B)$

indeterminato $\downarrow$ $rk(A)$ non è massimo, $rk(A) = rk(A,B)$

$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$

$\downarrow$ scambio x con termini noti

$Im(y) = rk$

1) PRODOTTO MATRICI -> RIGA X COLONNA

2) MATRICE TRASPOSTA -> A^t (scambio righe e le metto al posto delle colonne)

CALCOLO DETERMINANTE

- MATRICE 2X2 -> DIAGONALE PRINCIPALE - SECONDARIA
- MATRICE 3X3 -> AGGIUNGO 2° COLONNE, MOLTIPLICO LE
  SARRUS DIAGONALI, DIAGONALE PRINCIPALE - SECONDARIA
- MATRICI + GRANDI -> LAPLACE -> $\det(A) = a_{12}|A_{12}| + a_{22}|A_{22}|$

$A_{12} = (a)^{1+2} \cdot \det$

* si sceglie 1 riga o una colonna

a = elementi matrice A = complemento algebrico

- MATRICE AGGIUNTA -> A^* matrice con i complementi algebrici

- MATRICE INVERSA -> A^{-1} {solo se $\det(A) \neq 0$}

-> 2X2 -> TEOREMA BINET $\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
  - si inverte diagonale
  - si cambia il segno al resto

-> MATRICI + GRANDI -> 1) CALCOLO DETERMINANTE
2) A^*
3) $A^* \cdot \frac{1}{\det}$

det = 0 se 1) riga o colonna = 0
2) 2 righe o colonne uguali
3) TRIANGOLARE -> PRODOTTO DIAGONALE

RANGO MATRICE

1) GAUSS O GAUSS-JORDAN

2) MINORI + TEOREMA ORLATI -> minori = n. righe
min 2 = 2 righe e 2 colonne
min 3 = 3 righe e 3 colonne

aggiungo righe e colonne

calcolo il det

punta-coda

Im(f)

APPLICAZIONE LINEARE

ADDITIVITÀ . $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in$

OMOGENEITÀ $a \cdot f(v) \quad \forall a \in K, v \in V$

$Im(f) = rk$

$Ker(f)$ matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix} = (0, 0 \ldots)$

$\dim Ker(f) =$ Sottospazio $- Im(f)$

- AUTOVALORI $= \det A\,(A-\lambda I)$
- AUTOVETTORI $= (A-\lambda I)\vec{v} = 0$

↳ si sostituisce

AUTOSPAZIO = AUTOVETTORE

E

ENDOMORFISMO SEMPLICE?

$\dim V\lambda_1 + \dim V\lambda_2 = \dim \underset{\mathbb{R}}{n}$

↓

autovettori

- DIAGONALIZZAZIONE

$A = P^{-1} \cdot D \cdot P \rightarrow$ MATRICE INVERTIBILE

↓ INVERSA

↓ DIAGONALE

P lo costruiamo con i vettori

$D = \lambda$

P^{-1} (inversa matrice)

$P \cdot D$ (prodotto)

risultato $\cdot P^{-1}$

VETTORI

CHIUSURA SOMMA

1) $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W$

2) $u(u_1, u_2) \in W$ e $v(v_1, v_2) \in W$

4) $\forall\ u_1, u_2 \in W \rightarrow u_1 + u_2 \in W$

5) $\forall\ v_1, v_2 \in W \rightarrow v_1 + v_2 \in W$

6) $u + v = (u_1 + v_1 , u_2 + v_2) \in W$

1) 2) in caso si aggiunge elemento generico

3) → esempio $u_1 - 2u_2 = 0$ $v_1 - v_2 = 0$

4) 5) 6)

$(u_1 - 2u_2) + (v_1 - 2v_2) = 0 + 0 = 0$

Quindi $\vec{u} + \vec{v} \in W$

CHIUSURA PRODOTTO

$\forall a \in K , \forall u \in W \rightarrow aw \in W$

$a(x - 2y) = a(x - 2y)$

$x - 2y = 0$

$ax - 2(ay) = 0 \in W$

ELEMENTO NEUTRO

$x - 2y = 0$

$x - 2y = 0 - 2 \cdot 0 = 0$